Curso Teoria Cuantica de Campos by:Javier Garcia
Ejercicio (2)
Realizado por A.MV

Definicion:

$$< \Box >\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \Box \exp(-\frac{a}{2}x^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{a}{2}x^2)}(1)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx(x^2) \exp(-\alpha x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}(3)$$

(a)
Calcular $< x >$

$$< x >\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx(x) \exp(-\frac{a}{2}x^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{a}{2}x^2)} = \frac{p}{q}$$

$$q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{a}{2}x^2) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx(x) \exp(-\frac{a}{2}x^2) = \frac{1}{-a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx(-ax) \exp(-\frac{a}{2}x^2) = \exp(-\frac{a}{2}x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Por tanto,

$$< x >= 0$$

(b)
Calcular $< x^2 >$

$$< x^2 >\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx(x^2) \exp(-\frac{a}{2}x^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{a}{2}x^2)} = \frac{p}{q}$$

$$q = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} dx(x^2)\exp(-\frac{a}{2}x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\frac{a}{2}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}2^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}2^{\frac{3}{2}-1}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$< x^2 >\equiv \frac{\frac{2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}}{\frac{2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

(c)

Aqui se nos pide generalizar para $< x^{2n} >$, asumamos que las propiedades que nos permiten derivar bajo el signo de la integral(mandar la derivada a dentro) siguen siendo validas.

$$\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{a}{2}x^2) = \frac{d}{da}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{d}{da}\exp(-\frac{a}{2}x^2) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{da}a^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx(-\frac{x^2}{2})\exp(-\frac{a}{2}x^2) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}) =$$

Con el fin de no copiar demasiado y sin perdida de generalidad, podemos observar lo siguiente.

Los simbolos negativos a cada lado de la igualdad, salen con la misma periodicidad $(-1)^{2k-1}$siendo k el numero de veces que aplicamos el operador derivada. Por tanto se eliminan el uno al otro.(Los obviare de aqui en adelante)

Por la izquierda tenemos:

$$\frac{d^1}{da^1}\exp(-\frac{a}{2}x^2) = (\frac{x^2}{2})\exp(-\frac{a}{2}x^2)$$

$$\frac{d^2}{da^2}\exp(-\frac{a}{2}x^2) = (\frac{x^2}{2})(\frac{x^2}{2})(\exp(-\frac{a}{2}x^2)$$

$$\frac{d^k}{da^k}\exp(-\frac{a}{2}x^2) = (\frac{x^{2k}}{2^k})(\exp(-\frac{a}{2}x^2)$$

Por la derecha:

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{da}a^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}})(2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{da^2}a^{-\frac{1}{2}}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{5}{2}})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})$$

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{d^k}{da^k}a^{-\frac{1}{2}}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{2k+1}{2}})(\frac{(2k-1)}{2})(\frac{(2k-3)}{2}).........\frac{1}{2}$$

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{d^k}{da^k}a^{-\frac{1}{2}}=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{2^k}(a^{-\frac{2k+1}{2}})(2k-1)(2k-3)..........5.3.1$$

Igualando

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx(\frac{x^{2k}}{2^k})(\exp(-\frac{a}{2}x^2)=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{2^k}(a^{-\frac{2k+1}{2}})(2k-1)(2k-3)..........5.3.1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx(x^{2k})(\exp(-\frac{a}{2}x^2)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{2k+1}{2}})(2k-1)(2k-3)..........5.3.1(4)$$

Insertando (4) en (1)

$$<x^{2k}>\equiv\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dx(x^{2k})\exp(-\frac{a}{2}x^2)}{\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp(-\frac{a}{2}x^2)}=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{(a^{-\frac{2k-1}{2}})}{a^{-\frac{1}{2}}}(2k-1)(2k-3)..........5.3.1$$

$$<x^{2k}>\equiv\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dx(x^{2k})\exp(-\frac{a}{2}x^2)}{\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp(-\frac{a}{2}x^2)}=a^{-k}(2k-1)(2k-3)..........5.3.1$$

$$<x^{2k}>=\frac{1}{a^k}(2k-1)(2k-3)..........5.3.1$$

$$<x^{2k}>=\frac{1}{a^k}\frac{2k!}{2^k k!}$$

Como queriamos mostrar.